Funkce definované implicitně – jednoduché příklady na začátek :

Ukažte, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$.
Pak i) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$,
ii) napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0),
iii) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0 pomocí Taylorova polynomu 2.stupně
když:

a) $F(x,y)=x^2-y^3+x^2y-1,\ \ (x_0,y_0)=(1,0)$;
b) $F(x,y)=x^3+y^3-3xy-3,\ \ (x_0,y_0)=(1,2)$;
c) $F(x,y)=xy-e^x+e^y,\ \ (x_0,y_0)=(0,0)$;
d) $F(x,y)=xy-\ln x-2,\ \ (x_0,y_0)=(2,1)$;
e) $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-arctg\frac{y}{x},\ \ (x_0,y_0)=(1,0)$.

Funkce definované implicitně – další příklady

Implicitní funkce dvou proměnných.

1. Ukažte, že rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $z=f(x,y)$, která má v okolí bodu (x_0,y_0) spojité parciální derivace druhého řádu.
Pak určete totální diferenciál funkce f v bodě (x_0,y_0) (a zatím parciální derivace druhého řádu, později i diferenciál druhého řádu), když
   a) $F(x,y,z)=z^3-2xz+y,\ \ (x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$;
   b) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz-4,\ \ (x_0,y_0,z_0)=(0,0,2)$;
   c) $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\log\frac{z}{y},\ \ (x_0,y_0,z_0)=(0,1,1)$;
   d) $F(x,y,z)=e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2;\ \ (x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$.

2. (i) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x,y,z)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová.
   (ii) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (x_0,y_0,z_0) k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$, když
   a) $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz-6,\ \ (x_0,y_0,z_0)=(1,2,-1)$;
   b) $F(x,y,z)=x\sin z+y\cos z-e^z,\ \ (x_0,y_0,z_0)=(2,1,0)$.

3. Rozhodněte, kdy je rovnicí $G(x,y,z)=0$ definována implicitní funkce $z=g(x,y)$, je-li $G(x,y,z)=F(\frac{y}{x},\frac{z}{y})$. Ukažte, že potom platí $x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=g$.

Soustavy implicitně definovaných funkcí.

1. Ukažte, že soustavou rovnic
$$x^2 + y^2 = z$$
$$x + y + z = 2 \qquad (*)$$
jsou v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (-1,1,2)$ definovány implicitně funkce $y = f(x)$, $z = g(x)$.
Určete $f'(-1)$ a $g'(-1)$ a tečný vektor ke křivce, dané rovnicemi (*), v bodě $(-1,1,2)$.

2. Ukažte, že soustavou rovnic
$$x^3 + y^3 - z^3 = 10$$
$$x + y + z = 0$$
jsou v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,-2)$ definovány implicitně funkce $y = f(x)$, $z = g(x)$.
Najděte aproximace funkcí f , g v okolí bodu $x_0 = 1$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

3. Ukažte, že soustavou rovnic
$$x + y - 2u^2 + v^2 = 0$$
$$x - y - uv = 0$$
jsou v okolí bodu $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1,0,1,1)$ definovány implicitně funkce $u = f_1(x, y)$, $v = f_2(x, y)$.
Určete totální diferenciál zobrazení $f = (f_1, f_2)$ v bodě $(1,0)$.